

EMELT ÓRASZÁMÚ KÉPZÉS MATEMATIKA HELYI TANTERVE

Feltételek

Ezt a tantervet olyan tanulócsoporthoz írtuk, amelyekben az átlagosnál nagyobb az érdeklődés a matematika iránt, illetve érettségi után e tantárgyhoz kapcsolódó terveik vannak.

Ebbe a csoportba elsősorban azokat a diákokat várjuk, akiknek matematikatudásuk megfelelően megalapozott, általános iskolában nem okozott nekik problémát a tantárgy tanulása, tananyaghoz kapcsolódó feladatokat készség szinten tudnak megoldani.

A matematika tananyagának ún. "spirális felépítése" miatt a 9 – 12. évfolyamon bizonyos ismeretek és az általuk kialakítandó készségek ismételten megjelennek, természetesen mindenütt az életkornak megfelelő szinten.

Ezek a következők:

1. Gondolkodási és megismerési módszerek
2. Számtan, algebra
3. Összefüggések, függvények, sorozatok
4. Geometria
5. Valószínűség, statisztika

A tantervben leírt, témakörökre vonatkozó sorrendiség megcserélhető, azaz a sorszám nem jelent szigorú sorrendet. Sorrendcsere esetén a felhasználó feladata annak vizsgálata, hogy milyen előzményekre építhet, s milyenekre nem.

Értékelés

Folyamatosan szóbeli és írásbeli feleletekkel, évente 4-5 alkalommal egy-egy egész órás "témazáró" dolgozattal történik.

9. év elején mindenképp hasznosnak tartjuk egy diagnosztikus felmérést végezni az általános iskolai tananyagból, azért hogy lássuk, hogy a 9. évfolyam ismétlő-rendszerző részeiben mivel kell hangsúlyosabban foglalkozni.

A 10. év végén 180 perces ún. "kisérettségit" írnak a tanulók, melyben az iskolánkban töltött 2 év, ill. a matematikával töltött 10 év anyagából elsajátított ismereteikről, tudásukról adnak számot, a "kisérettségi" érdemjegye három jegynek felel meg. Ez érettségi típusú vizsgának számít.

12. év elején, az őszi vizsgaidőszakban próbaérettségit írnak diákjaink a gimnáziumi tananyagból. Erre már előző év során is készítjük tanulóinkat. Az erre adott érdemjegy témazáró értékű.

Osztályozó, pótló és javítóvizsga esetén a kiadott témákból írásbeli dolgozatot írnak diákjaink. Szóbeli vizsga nincs.

Értékelés osztályzattal:

Témazárók, pótló, javító és osztályozó vizsga Kis érettségi és próba érettségi esetén:

0-29% elégtelen	0-24% elégtelen
30-49% elégséges	25-39% elégséges
50-74% közepes	40-59% közepes
75-89% jó	60-79% jó
90-100% jeles	80-100% jeles

Célok és feladatok

A középfokú képzés során a matematika tanulása-tanítása tekintetében az egyik legfontosabb feladat a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. A 9. évfolyamtól kezdve a spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

Az 1–4. és 5–8. évfolyamos képzés nevelési-oktatási szakaszait jellemző tanuláshoz és tanításhoz képest a 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új

fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztetetők a tanulókkal. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. Néhány tétel bizonyítása azonban elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése. Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának képességét, valamint a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát. Ennek a folyamatnak az eredményeképpen a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni. A matematika tanulásának-tanításának egyik fő célja, hogy fejlődjön a tanuló mérlegelő gondolkodása, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségek és képességek rendszere. A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.

Ebben a nevelési-oktatási szakaszban az ismert számok köre az irracionális számokkal bővül, valamint új műveletek bevezetésére és már ismert műveletek alaphalmazának bővítésére kerül sor a permanenciaelv alapján. Ezen folyamat során a tanuló egyre inkább képes lesz rá, hogy változatos matematikai objektumokat jelölő szimbólumokkal végezzen műveleteket.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. Ehhez – több más fogalom mellett – szükséges a függvény fogalmának változatos (nemcsak számhalmazokon értelmezett) példák mentén történő kiterjesztése.

A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni. A tanuló különböző forrásokat (tankönyv, függvény táblázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon, alkalmanként szaktanár jóváhagyásával számonkéréseknél is, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Ebben az életkorban is érvényesülnie kell a tanuló érdeklődésének, adottságának, absztrakciós szintjének megfelelő differenciálásnak. Ez a differenciálás jelentheti a Nat-ban leírt tananyagtartalmaknak a lehetőségekhez igazított bővítését is.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

A matematika tantárgy a Nemzeti Alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

A tanulás kompetenciái: A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának képességét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétele, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

A kommunikációs kompetenciák: A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének készségét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának készségrendszer.

A digitális kompetenciák: A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

A matematikai, gondolkodási kompetenciák: A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozhat olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

A személyes és társas kapcsolati kompetenciák: A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulása során erősödik a tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái: A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.

A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.

Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák: A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projektekben való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményezőképeség, másokkal való együttműködés készsége).

9–10. évfolyam

A 9–10. évfolyamon a korábbi képzési szakaszok során megszerzett ismeretekre és kialakított készségekre, képességekre alapozva – a spirális tananyagfelépítést szem előtt tartva – az egyes témakörök új ismeretei matematikai szempontból egyre pontosabb és elvontabb formában jelennek meg a tanulási-tanítási folyamat során. Egyre határozottabb a fogalmak pontos definiálásának, az állítások, tételek indoklásának, bizonyításának, valamint az általánosításnak az igénye. Erre a szakaszra fokozottan jellemző a korábbi és az új ismeretek egységes rendszerbe foglalása, az egyes témakörökön belüli rendszerezés.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló – a lehetőségekhez mérten – a tanár által irányított módon, feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok fejlesztik a matematikai kommunikációt. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést és a felfedeztetést.

A 9–10. évfolyamon megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Ebben a szakaszban jelennek meg először a valós számok; elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek; a függvény fogalma, függvénytulajdonságok; a kör és részei. Vannak olyan témakörök, amelyek megjelennek más területek tanítása során is, ezért a tananyag egyes részeihez javasolt óraszámok nem feltétlenül jelentenek időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése lehetővé teszi a hétköznapi vagy matematikai nyelven megfogalmazott problémák és a megoldás során alkalmazott matematikai modellek körének bővülését.

A matematika a kultúrtörténetnek is része. Segítheti a matematikához való pozitív hozzáállást, ha bemutatjuk a tananyag egyes elemeinek a művészetekben való alkalmazását. A motivációs bázis kialakításában komoly segítség lehet a matematikatörténet egy-egy mozzanatának megismertetése, a máig meg nem oldott, egyszerűnek tűnő matematikai sejtések megfogalmazása, nagy matematikusok életének, munkásságának megismerése. Euklidész, Pitagorasz, Descartes, Bolyai Farkas, Bolyai János, Thalész, Euler, Gauss, Pascal, Cantor, Erdős, Neumann.

Minden életkori szakaszban fontos a differenciálás. Ez nemcsak az egyéni igények figyelembevételét jelenti. Sokszor az alkalmazhatóság vezérli a tananyag és a tárgyalásmód megválasztását, más esetekben a tudományos igényesség szintje szerinti differenciálás szükséges. Egy adott osztály matematikatanítása során a célok, feladatok teljesíthetősége igényli, hogy a tananyag megválasztásában a tanulói érdeklődés és a pályaorientáció is szerepet kapjon. A matematikát alkalmazó pályák felé vonzódnak tanulók gondolkodtató, kreativitást igénylő versenyfeladatokkal motiválhatók, a humán területen továbbtanulni szándékozók számára érdekesebb a matematika kultúrtörténeti szerepének kidomborítása, másoknak a középiskolai matematika gyakorlati alkalmazhatósága fontos. A fokozott szaktanári figyelem, az iskolai könyvtár és az elektronikus eszközök használatának lehetősége segíthetik az esélyegyenlőség megvalósulását.

Az ország gazdaságának műszaki, informatikai, és természettudományos pályák iránt megnövekedett kereslete szükségessé teszi, hogy a közoktatásban is nagy számban legyenek olyan osztályok, csoportok, amelyek a matematikát és (vagy) a természettudományokat magasabb szinten tanulják. Működnek ugyan az országban speciális matematika tagozatok heti 6–8 matematikaórával, és ezeknek nagy szerepe van a tudósutánpótlás biztosításában, de ezek számát a jelenlegi 10–12-nél lényegesen többre növelni nem célszerű. A gazdasági élet szakember-utánpótlását a normál és speciális osztályoké közötti, kb. heti 5 órás óraszámú, nagy számban működő emelt szintű osztályokkal célszerű biztosítani.

Ebben a helyi tantervben a négy/nyolc osztályos gimnáziumok olyan tanulóinak kívánunk magasabb szintű ismereteket nyújtani, akik nagyobb érdeklődést mutatnak a matematika iránt. Az ország középiskoláinak jelentős részében van egy osztálynyi vagy legalább egy fősztálynyi matematika, illetve természettudományos tárgyak iránt érdeklődő tanuló, akiknek ajánlott kissé kibővített tananyaggal, magasabb szintű feladatanyaggal tanítani a matematikát.

Elsődleges célunk, hogy a tanulók szemléletét, gondolkodásmódját fejlesszük. Azt a lehetőséget, hogy ezt a tantervet a matematika iránt érdeklődő tanulók számára választják, és azt, hogy itt heti öt óra áll rendelkezésre a matematika elsajátítására, nem arra kívánjuk fordítani, hogy a speciális matematika tagozatos osztályokéhoz közelítő mértékben bővítsük a középiskolai anyagot, hanem olyan új ismereteket építettünk be, amelyek a szemléletfejlesztéshez, az összefüggések könnyebb felismeréséhez, a tantárgy megszerettetéséhez szükségesek. Mindez nem azt jelenti, hogy az eredményesség növelése másodrangú cél lenne. Sőt, így maradt idő hatékonyabb, de időigényes módszerek (pl. önálló felfedeztetés, differenciált feladatok) alkalmazására, egy-egy felmerülő probléma részletesebb elemzésére. A tapasztalatok azt mutatták, hogy a fenti célú mérsékelt tananyag-növekedés az elért szemléletfejlődéssel és a megnövekedett gyakorlási idővel jelentős teljesítményjavulást eredményez.

Formai megjegyzés a tanterv további részeihez:

A tantervben a 2020-as kerettantervet bontottuk évekre, majd ezt egészítettük ki az emelt órászámú képzés anyagával. Ezeket **sárgával kiemelten, dőlt betűkkel** jelöltük.

9. évfolyam

A témakörök áttekintő táblázata:

Témakör neve	Javasolt órászám
Halmazok	25
Kombinatorika	
Számhalmazok, műveletek	25
Hatvány, hatvány azonosságok, nevezetes azonosságok	
Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során	
Arányosság, százalékszámítás	15
Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	30
A függvény fogalma, függvénytulajdonságok	30
Geometriai alapismeretek	35
Háromszögek	
Négyszögek, sokszögek	
A kör és részei	
Transzformációk, szerkesztések	10
Leíró statisztika	
Ellenőrzés, számonkérés	15
Összes órászám:	185

TÉMAKÖR: Halmazok

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adott halmazt diszjunkt részhalmazaira bont, osztályoz;
- halmazokat különböző módokon megad;
- halmazokkal műveleteket végez, azokat ábrázolja és értelmezi.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Halmaz közös elem nélküli részhalmazokra bontása, példák ennek alkalmazására a matematikán belül, más tantárgyaknál és a mindennapi életben
- Halmaz megadása utasítással, elemek felsorolásával
- Halmazok közötti viszonyok ábrázolása, értelmezése
- Halmazok metszetének, uniójának, különbségének, komplementerének képzése, ábrázolása és értelmezése, **szimmetrikusdifferencia, Descartes-féle szorzat**
- **Halmazműveletek tulajdonságai**
- **Ismerje és alkalmazza a de Morgan azonosságokat.**
- Két-három halmaz elemszámával kapcsolatos feladatok megoldása logikai szita segítségével
- Szemléletes kép végtelen halmazokról
- **Ismerjen példát véges, megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálhatóan végtelen halmazra. Ismerje a megszámlálhatóan végtelen halmaz definícióját. Bizonyítsa egyszerűbb esetekben, hogy egy halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen**
- **Matematikatörténet: Georg Cantor.**
- **Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú sorozatok készítése. Adott tulajdonságú halmazok konstruálása. Ábrák színezése,**

lefedése adott feltételek szerint. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre. (Invariáns mennyiség keresése.)

FOGALMAK

alaphalmaz, részhalmaz, üres halmaz, halmazok egyenlősége, Venn-diagram; halmazműveletek: unió, metszet, különbség, *szimmetrikus differencia*, *Descartes szorzat*, komplementer halmaz; diszjunkt halmazok, halmaz elemszáma, logikai szita

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Hétköznapi életből, más tantárgyakból vagy a matematikából vett, konkrétan vagy digitálisan megjelenített alaphalmazból megadott tulajdonságokkal rendelkező elemek válogatása
- Konkrét részhalmaz esetén a részhalmaz képzési szempontjainak megállapítása
- A történelem, a művészetek, a tudományok, a sport neves személyiségeinek kitalálása különböző tulajdonságok alapján
- Barkochba játék
- A „végtelen szálloda” mint modell
- Megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazok elemei között egyértelmű hozzárendelés felfedeztetése, például a pozitív természetes számok halmazának számossága megegyezik a pozitív páros számok halmazának számosságával

TÉMAKÖR: Kombinatorika

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
- Sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
- Esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
- Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
- ismétlés nélküli és ismétléses permutáció, ismétlés nélküli és *ismétléses* variáció, *ismétlés nélküli kombináció*
- *Permutáció, variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Kombináció – ismétlés nélkül*
- *Jelek használata: $n!$, $\binom{n}{k}$*
- *Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik. Pascal-háromszög.*
- *Matematikatörténet: Blaise Pascal, Erdős Pál.*
- *Néhány kombinatorikus geometriai feladat. n pont maximum hány egyenest határoz meg? n egyenesnek maximum hány metszéspontja lehet? n egyenes maximum hány részre osztja a síkot?*
- *a teljes indukció módszerét és változatait kombinatorikai és gráfelméleti feladatokban alkalmazza;*
- *kombinatorikus interpretációval igazol azonosságokat;*
- *a binomiális együtthatókat megbízhatóan használja kombinatorikai és algebrai feladatokban;*

FOGALMAK

permutáció, variáció, kombináció

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámplálással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
- Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
- Néhány feltételt tartalmazó tanulói órarend készítése kis elemszámmal
- Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása
- Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorikafeladatokhoz saját szöveg írása

- Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása

TÉMAKÖR: Számhalmazok, műveletek

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás műveleti azonosságokat helyesen alkalmazza különböző számolási helyzetekben;
- racionális számokat tizedes tört és közösleges tört alakban is felír;
- ismeri a valós számok és a számegyenes kapcsolatát;
- ismeri és alkalmazza az abszolút érték, az ellentett és a reciprokok fogalmát;
- a számolással kapott eredményeket nagyságrendileg megbecsüli, és így ellenőrzi az eredményt;
- valós számok közelítő alakjaival számol, és megfelelően kerekít.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Műveleti azonosságok (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás), zárójelek helyes használata
- Tizedes törtek átírása közösleges tört alakba és viszont
- Irracionális számok szemléltetése
- Racionális számok elhelyezkedése számegyenesen
- Nyílt és zárt intervallumok fogalmának ismerete és alkalmazása
- Számok abszolút értékének, ellentettjének és reciprokának meghatározása
- Számológéppel elvégzett számítások eredményének előzetes becslése és nagyságrendi ellenőrzése
- Valós számok adott jegyre kerekítése
- Valós számok gyakorlati helyzetekben történő észszerű kerekítése

FOGALMAK

racionális szám, irracionális szám, valós szám, nyílt intervallum, zárt intervallum, abszolút érték, ellentett, reciprokok

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A számológép helyes használatának elsajátítása, például műveleti sorrend, zárójelek
- Írásban elvégzett műveletek ellenőrzése számológéppel
- Célszám megközelítése adott számjegyekkel, műveleti jelek és zárójelek használatával
- Tanulói kiselőadás a helyiértékes számírás kialakulásáról, a számjegyek kialakulásának történetéről
- A tanteremben vagy a tanterem környezetében végzett mérések esetén a megfelelő kerekítés alkalmazása
- Adott mérés elvégzése esetén a mérési hiba következményeinek vizsgálata

TÉMAKÖR: Hatvány

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az egész kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- ismeri és alkalmazza a normálalak fogalmát.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Valós számok hatványozása pozitív egész kitevőre
- Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre
- A hatványozás azonosságainak megfigyelése, felfedezése
- A hatványozás azonosságainak bizonyítása konkrét alapszám és tetszőleges pozitív egész kitevő esetén
- Számok normálalakja
- Számolás normálalak segítségével

FOGALMAK

hatványalap, hatványkitevő, normálalak

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Projektmunka: hányszor lehet félbehajteni egy nagyméretű papírt? Keresés az interneten, kísérlet végzése például egy teljes guriga vécépapírral
- Internetes forrásból származó, nagyon kicsi vagy nagyon nagy számokat tartalmazó cikkek valóságtartalmának megállapítása páros vagy csoportmunkában

TÉMAKÖR: Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- műveleteket végez algebrai kifejezésekkel;
- ismer és alkalmaz egyszerű algebrai azonosságokat;
- átalakít algebrai kifejezéseket összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Műveletek algebrai kifejezésekkel: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, **kifejezések hatványa, polinom osztása polinommal**
- Műveleti azonosságok ismerete és alkalmazása egyenletek megoldása során
- Az $(a + b)^2$, az $(a - b)^2$ és az $(a + b)(a - b)$ kifejezésekre vonatkozó nevezetes azonosságok ismerete és alkalmazása (például oszthatósági feladatokban, egyenletek megoldásában, függvények ábrázolásában)
- Egyszerű másodfokú polinom átalakítása teljes négyzetté kiegészítéssel
- Algebrai kifejezések átalakítása összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával
- **$(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $(a + b + c)^2$, $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$**
- **Utalás $(a + b)^n$ kiszámolásra Pascal-háromszög segítségével.**
- **Tudja alkalmazni feladatokban az $a^n - b^n$, illetve az $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ kifejezés szorzattá alakítását.**
- **Geometria: azonosságok „rajzos” igazolása. Geometria és algebra összekapcsolása az azonosságok igazolásánál.**
- **Matematikatörténet: algebra – Al-Hvarizmi.**
- **Számítani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőtlenség. Algebrai bizonyítás két változóra.**
- **Szélsőérték-feladatok közepek segítségével. Egyszerű másodfokú polinom átalakítása teljes négyzetté kiegészítéssel**

FOGALMAK

összeg, tag, szorzat, tényező, egynemű kifejezés, együttható, teljes négyzet, polinom

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Gondolj egy számra, és én kitalálom” játék, matematikai bűvészlucskók algebrai magyarázata
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek geometriai modellezése
- A nevezetes azonosságok geometriai megjelenítése
- Számolási „trükkök” a nevezetes azonosságok segítségével, például kétjegyű számok négyzetének, $99 \cdot 101$ típusú szorzat eredményének kiszámolása fejben

TÉMAKÖR: Arányosság, százalékszámítás

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az egyenes és a fordított arányosságot.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az egyenes és a fordított arányosság fogalmának ismerete és alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Az egyenes és a fordított arányosság grafikonjának felismerése és elkészítése
- Példák az egyenes és a fordított arányosságtól különböző arányosságokra (négyzetes, gyökös)
- Példák egy irányban vagy ellentétes irányban változó mennyiségpárookra a mindennapi életből

- Százalékszámítással kapcsolatos hétköznapi helyzetekhez (például háztartási bevételekhez, kiadásokhoz, pénzügyi fogalmakhoz, gazdasági folyamatokhoz) és más tantárgyakhoz köthető feladatok megoldása

FOGALMAK

egyenes arányosság, fordított arányosság, százalékalap, százaléktétel, százalékláb

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Összetett, valódi élethelyzetekkel kapcsolatos feladatok megoldása csoportmunkában, szükség esetén grafikon segítségével
- Háztartási számlák elemzése az azokon megjelenő egységárak és fizetendő összegek figyelembevételével

TÉMAKÖR: Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készíti;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza a következő egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, szorzattá alakítás;
- megold elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket, elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Elsőfokú egyenltre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Alaphalmaz, megoldáshalmaz fogalmának ismerete
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlet és egyenlőtlenség megoldása mérlegelvvel és grafikusan
- *Értelmezési tartomány, illetve értékkészletvizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható összetett feladatokat megoldása*
- *Abszolút értéket tartalmazó egyenletek (több abszolút értéket tartalmazók is)*
- *Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek. Algebrai és grafikus megoldás.*
- *Törtés egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása*
- *Elsőfokú paraméteres egyenletek*
- *Új ismeretlen bevezetése*
- Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása behelyettesítéssel, közös együtthatók módszerével, grafikusan
- *Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek*
- *Egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszerek.*
- Elsőfokú egyenlettel, egyenlőtlenséggel, egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok megoldása (például út-idő-sebesség, közös munkavégzés, keverékes feladatok, pénzügyi és gazdasági tematikájú feladatok)
- *Elsőfokú, háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása.*

FOGALMAK

alaphalmaz, megoldáshalmaz, mérlegelv

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Szöveges feladatok megoldása több különböző úton, a különböző megoldások összehasonlítása előnyök és hátrányok szempontjából
- Hiányos, túlhatározott, illetve ellentmondó adatokat tartalmazó problémák vizsgálata
- Nyílt végű problémák megoldása
- Adott egyenlethez szöveges feladat alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek grafikus megoldása során; a digitális eszközzel történő ábrázolás előnyeinek és hátrányainak megbeszélése

TÉMAKÖR: A függvény fogalma, függvénytulajdonságok

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- megad hétköznapi életben előforduló hozzárendeléseket;
- adott képlet alapján helyettesítési értékeket számol, és azokat táblázatba rendezi;
- táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben;
- a grafikonról megállapítja függvények alapvető tulajdonságait.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi hozzárendelések megfigyelése, tulajdonságainak megfogalmazása: egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű
- Függvény megadása, alapvető függvénytani fogalmak ismerete, **pontos definíciója**
- Függvényértékek meghatározása és táblázatba rendezése
- Függvények ábrázolása táblázat alapján
- Függvények alkalmazása valós, hétköznapi helyzetek jellemzésére, gyakorlati problémák megoldására
- A grafikon alapján a függvény értelmezési tartományának, értékészletének, minimumának, maximumának és zérushelyének megállapítása, a növekedés és fogyás leolvasása, **periodicitás, paritás, konvexitás, korlátosság- pontos definíciók. Néhány esetben a tagadás megfogalmazása is: pl. egy függvény nem páros, ha...**
- Lineáris függvény, másodfokú függvény, **hatványfüggvények**, négyzetgyökfüggvény, fordított arányosságot leíró függvény (elemi függvények), **egészrész-, törtrész-,előjel függvény, Dirichlet-féle függvény** grafikonja, tulajdonságai
- Elemi függvényekkel egyszerű függvénytranszformációs lépések végrehajtása: $f(x) + c$, $f(x + c)$, $c \cdot f(x)$, $|f(x)|$
- Lineáris függvények hozzárendelési utasításának leolvasása grafikon alapján
- Egyszerű függvények esetén az $f(x) = c$ alapján x meghatározása és ennek alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés megfordítása és a megfordított hozzárendelés ábrázolása
- **Függvények összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának fogalma és alkalmazása.**
- **Függvények megszorításának (leszűkítésének) és kiterjesztésének fogalma, alkalmazása**
- **Inverzfüggvény fogalma, alkalmazása.**
- **Összetett függvény fogalma, képzése, ábrázolása.**
- $c \cdot f(x + b) + d$ és $c \cdot f(ax) + d$ ábrázolása

FOGALMAK

egyértelmű hozzárendelés, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékészlet, helyettesítési érték, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás, **paritás, korlátosság, konvexitás, periodicitás**

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Összetett, valódi helyzetekkel, például demográfiai kérdésekkel, pénzügyi feladatokkal kapcsolatos grafikonok elemzése csoportmunkában

- Hétköznapi helyzetekben időben változó folyamatokkal kapcsolatos mérések végzése és a mért adatok ábrázolása koordináta-rendszerben (például hőmérséklet)
- A tanulók mindennapi életéhez kapcsolódó grafikonok ábrázolása és elemzése (például út-idő grafikon az iskolába való eljutásról)
- Egyszerű, másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati helyzethez köthető szélsőérték-feladatok megoldása csoportmunkában, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérése, megfigyelése
- Függvények ábrázolása digitális eszköz segítségével
- Barkochba játék a függvényekkel kapcsolatos fogalmak használatával
- Szöveges feladatok megoldása grafikus úton
- Algebrai úton nem vagy nehezen megoldható egyenletek közelítő megoldása grafikus úton digitális eszköz segítségével.

TÉMAKÖR: Geometriai alapismeretek

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és használja a pont, egyenes, sík (térelemek) és szög fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a nevezetes szögpárok tulajdonságait;
- ismeri az alapszerkesztéseket, és ezeket végre tudja hajtani hagyományos vagy digitális eszközzel.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Két pont, pont és egyenes, két egyenes távolságának alkalmazása a síkban
 - Egyenesek kölcsönös helyzetének ismerete és alkalmazása
 - Nevezetes szögpárok tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: pótiszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúciszögek, egyállású szögek, váltószögek
 - A szakaszfelező merőleges és a szögfelező, mint ponthalmazok tulajdonságainak ismerete
 - Dinamikus geometriai szoftver alkalmazásának előkészítése, használata
 - Alapszerkesztések végrehajtása hagyományos vagy digitális eszközzel euklideszi módon: szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése, szög másolása
- *Nevezetes ponthalmazok rendszerezése.*
- *adott térelemtől adott távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben;*
- *két térelemtől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben. Parabola, forgási paraboloid.*
- *Egyenlőtlességgel meghatározott ponthalmazok.*
- *Ponthalmazok a koordinátasíkon. Koordinátákkal megadott feltételek.*
- *Matematikatörténet: Descartes.*
- *Két vagy három feltételnek megfelelő ponthalmazok szerkesztése.*
- *kitérő egyenesek távolságának és hajlásszögének meghatározása*

FOGALMAK

pont, egyenes, sík, szögtartomány, hajlásszög, párhuzamos, merőleges, pótiszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúciszögek, egyállású szögek, váltószögek, szakaszfelező merőleges, szögfelező

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Az osztályteremben vagy a terem környezetében „egyenesek” kölcsönös helyzetének megadása, ezek távolságának megmérése
- Számszerű adatként csak a méretarányt tartalmazó térkép alapján valódi távolságok meghatározása, becslése
- Számszerű adatként csak méretarányt tartalmazó térképen adott helységek (közelítőleg) egyenlő távolságra levő helységek megkeresése

TÉMAKÖR: Háromszögek

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- kiszámítja háromszögek területét.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza a háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti kapcsolatokat; a speciális háromszögek tulajdonságait;
- ismeri és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmakat és tételeket;
- ismeri és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A háromszögek csoportosítása oldalak és szögek szerint
- Az alapvető összefüggések ismerete és alkalmazása háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között
- Speciális háromszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: szabályos, egyenlő szárú, derékszögű háromszög
- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmak, tételek ismerete és alkalmazása és **bizonyítása**: oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör, **hozzáírt kör**
- **Euler-egyenés és Feuerbach-kör bemutatása grafikus programmal**
- Az oldalfelező merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása
- A Pitagorasz-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- **A Pitagorasz-tétel bizonyítása és megfordításának bizonyítása**
- Pitagorasz tételének alkalmazása bizonyítási feladatokban.
- **Mikor hegyesszögű, illetve tompaszögű a háromszög?**
- **Két pont távolsága koordinátarendszerben.**
- **A paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Négyzetegyenlő merőlegességének feltétele.**
- **Matematikatörténet: Pitagorasz.**
- Háromszög területének kiszámítása **változatos módszerekkel**
- **Háromszög területképleteinek bizonyítása**

FOGALMAK

szabályos háromszög, egyenlő szárú háromszög, derékszögű háromszög, oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt kör, beírt kör

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételek felfedeztetése szerkesztéssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával, páros vagy csoportmunkában
- Konkrét alakzatok átdarabolása más alakzattá páros vagy csoportmunkában
- A derékszögű háromszög oldalaira szerkesztett négyzetek átdarabolása a Pitagorasz-tételnek megfelelő módon, pitagorasz-tangramok vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával

TÉMAKÖR: Négyzetek, sokszögek

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza speciális négyzetek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza a szabályos sokszög fogalmát; kiszámítja a konvex sokszög belső és külső szögeinek összegét.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) tulajdonságainak ismerete, területének kiszámítása
- Konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételek ismerete, bizonyítása és alkalmazása
- Szabályos sokszög fogalmának ismerete
- Szabályos sokszög területe átdarabolással
- *nevezetes négyszögek területének bizonyítása*

FOGALMAK

trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet, konvex sokszög, szabályos sokszög

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Különböző típusú speciális négyszögek területének meghatározására vonatkozó formula felfedeztetése átdarabolással
- A belső és a külső szögösszegre vonatkozó tételek felfedeztetése, illusztrálása átdarabolással, hajtogatással vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- Projektmunka: lakás/iskola alaprajzának elkészítése méretarányosan

TÉMAKÖR: A kör és részei

JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, őr tartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ki tudja számolni a kör és részeinek kerületét, területét;
- ismeri a kör érintőjének fogalmát, kapcsolatát az érintési pontba húzott sugárral;
- ismeri és alkalmazza a Thalész-tételt és megfordítását.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával
- *A szög ívmértéke. A radián, mint mértékegység. Átváltás fok és radián között.*
- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körcikk területével
- Kör, körcikk, körgyűrű és körszelet területének és kerületének kiszámítása
- Annak ismerete, alkalmazása *és bizonyítása*, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak
- *A kerületi és középponti szögek tételének és a kerületi szögek tételének bizonyítása és alkalmazása*
- *Látókör fogalmának ismerete és használata*
- A Thalész-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Thalész-tétel *és megfordításának* bizonyítása
- *Húrnégyszög-, érintő négyszögekre vonatkozó tételek és bizonyításuk, megfordításuk ismerete*
- *Matematikatörténet: Thalész*
- *Szerkesztési és bizonyítási feladatok.*
- *Körérintő szerkesztése.*

FOGALMAK

középponti szög, körív, körcikk, körgyűrű, körszelet, érintőszakaszok

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Annak felfedeztetése méréssel, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával; különböző méretű körök esetén a kapott adatok táblázatba foglalása

- A Thalész-tétel felfedeztetése szerkesztéssel, szögméréssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával

TÉMAKÖR: Transzformációk, szerkesztések

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismer példákat geometriai transzformációkra;
- ismeri és alkalmazza a síkbeli egybevágósági transzformációkat és tulajdonságaikat; alakzatok egybevágóságát;
- megszerkeszti egy alakzat tengelyes, illetve középpontos tükröképét, pont körüli elforgatottját, párhuzamos eltolását hagyományosan és digitális eszközzel;
- geometriai szerkesztési feladatoknál vizsgálja és megállapítja a szerkeszthetőség feltételeit.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Példák ismerete geometriai hozzárendelésekre (merőleges vetítés, párhuzamos vetítés, merőleges affinitás, térkép, fényképezés)
- **Merőleges vetítés alkalmazása feladatokban**
- A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás ismerete, tulajdonságaik, **pontos definíciója**
- A vektor fogalmának kialakítása a párhuzamos eltolás segítségével
- Egybevágósági transzformációk egymás utáni végrehajtása
- Egybevágósági transzformációk végrehajtása szerkesztéssel vagy digitális eszközzel
- Egybevágó alakzatok, szimmetriák megfigyelése a környezetben, művészeti alkotásokban
- Az egybevágósági transzformációk alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Háromszögek egybevágóságának alapesetei és ezek alkalmazása
- Négyszögek egybevágósága
- **Sokszögek egybevágóságának feltételei**
- Egyszerű szerkesztési feladatok megoldása hagyományos vagy digitális eszközzel; diszkusszió
- Gyakorlati feladatok megoldása egybevágóságok segítségével (például a sík parkettázása különféle síkidomokkal; szabásminta készítése, használata)
- **Geometriai szélsőérték-feladatok. Minimális utak meghatározása**
- **Háromszögbe írt minimális kerületű háromszög.**
- **Izogonális pont.**
- **Geometriai transzformációk és függvények kapcsolatának ismerete**
- **Példák térbeli egybevágósági transzformációkra**

FOGALMAK

tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás, párhuzamos eltolás, egybevágóság, forgásszög, vektor, vektorok összege,

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Gyakorlati példák keresése geometriai hozzárendelésekre, például fényképezés, filmvetítés
- A középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás bemutatása mint két tengelyes tükrözés egymásutánja
- M. C. Escher és Victor Vasarely néhány interneten is elérhető alkotásának elemzése a szimmetriák szempontjából; hasonló módszerrel képek alkotása
- A sík parkettázása egybevágó háromszögekkel, négyszögekkel papírsablonok vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- A tengelyes vagy középpontos szimmetriára alapozó stratégiai játékok (például pénzforgató, színezős) páros munkában

TÉMAKÖR: Leíró statisztika

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adatsokaságból adott szempont szerint oszlop- és kördiagramot készít hagyományos és digitális eszközzel.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Statisztikai adatok gyűjtésének tervezése
- Statisztikai adatok gyűjtése hagyományos és internetes forrásból
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése középértékekkel hagyományos és digitális eszközzel
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, egyszerű statisztikai következtetések
- Oszlop- és kördiagram értelmezése, valamint készítése hagyományos és digitális eszközzel
- Konkrét adatsokaság ábrázolásához, statisztikai kérdés megválaszolásához a megfelelő diagramtípus kiválasztása
- Kördiagramból oszlopdiagram készítése és viszont
- Grafikus manipulációk felismerése és javítása diagramok esetén

FOGALMAK

oszlopdiagram, kördiagram, átlag, medián, módusz, **szórás**

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Adatgyűjtés megtervezése, például forgalomszámlálás vagy iskolai felmérés előkészítése
- A megtervezett statisztikai adatgyűjtés lebonyolítása, az eredmények szemléltetése grafikonok segítségével, a kapott eredmények értékelő bemutatása tanulói kiselőadás formájában
- Különböző adatsokaságok esetében annak vizsgálata, hogy ezek jellemezhetők-e az ismert középértékekkel
- Érvelés a tanuló saját érdemjegyei alapján különböző statisztikai jellemzők segítségével a kedvezőbb év végi jegyért
- Különböző sportágak értékelési rendszerének és statisztikáinak bemutatása tanulói kiselőadás keretében
- Osztályok/tantárgyak eredményeinek összehasonlítása érdemjegyek és ezek középértékei alapján
- Csoportmunka keretében adott céllal készülő, megtévesztő oszlop- és kördiagramok készítése, ezek szóbeli értékelése, javítása

A FEJLESZTÉS VÁRT EREDMÉNYEI A 9. ÉVFOLYAM VÉGÉN:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Halmazműveletek alkalmazása számhalmazokra, ponthalmazokra.
- Definíció, tétel felismerése, az állítás és megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése
- A logikai szita alkalmazása feladatmegoldás során.
- Konstruktív feladatok megoldása, lehetetlenség bizonyítása.

Algebra

- Racionális és irracionális számok, a valós számok halmazának szemléletes fogalma, véges és végtelen tizedes törtek, számegyenes alkalmazása.
- Számok normálalakja, normálalakkal végzett műveletek alkalmazása.
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek, azonosságok alkalmazása. Polinom osztása polinommal.
- Első- és abszolútértékes egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása.
- Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.
- A számológép használata.

Függvények, sorozatok

- A függvény fogalmának mélyülése. Új függvényjellemzők ismerete: korlátosság, periodicitás.
- A négyzetgyök függvény ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk elvégzése.
- Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján.

Geometria

- Tételek ismerete, távolság és szög fogalma, mérése.
- Nevezetes ponthalmazok rendszerezése, alkalmazása.
- A kör és részeinek ismerete.
- Körrel kapcsolatos tételek alkalmazása (kerületi és középponti szögek tétele, húrnégyszögek és érintőnégyyszögek tételei).
- Egybevágósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete.
- Egybevágó alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.
- Vektor fogalmának, vektorműveleteknek az ismerete. Vektorfelbontás, vektorkoordináták meghatározása adott bázisrendszerben.
- Háromszögek, négyszögek, sokszögek szögei, nevezetes vonalainak, köreinek ismerete. Az ismeretek alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban.
- A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel alkalmazása.

Statisztika

- Statisztikai adatok elemzése: adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése; adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának, szórásának meghatározása.

A TOVÁBBHALADÁS FELTÉTELEI:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Halmazokkal kapcsolatos alapfogalmak ismerete, halmazok szemléltetése, halmazműveletek ismerete; számhalmazok ismerete.
- Definíció, tétel felismerése, az állítás és a megfordításának felismerése
- Egyszerű leszámítási feladatok megoldása, a megoldás gondolatmenetének rögzítése szóban, írásban.

Algebra

- Egyszerű algebrai kifejezések használata, műveletek algebrai kifejezésekkel; egész kitevőjű hatványok, azonosságok.
- Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet megoldása; ilyen egyenletre vezető szöveges és gyakorlati feladatokhoz egyenletek felírása és azok megoldása, a megoldás önálló ellenőrzése.

- Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.
- A tanulók képesek a matematikai szöveg értő olvasására, szövegekből a lényeg kiemelésére.

Összefüggések, függvények, sorozatok

- A függvény megadása, a szereplő halmazok ismerete (értelmezési tartomány, értékkészlet); valós függvény alaptulajdonságainak ismerete.(Zérushely, monotonitás, szélsőérték, grafikon)
- A tanult alapfüggvények ismerete
- Egyszerű függvény-transzformációk végrehajtása.
- Függvénymodell készítése lineáris kapcsolatokhoz; a meredekség.

Geometria

- Tételek ismerete; távolság és szög fogalma, mérése.
- Nevezetes ponthalmazok ismerete, szerkesztésük.
- A kör és részeinek ismerete.
- Körrel kapcsolatos tételek alkalmazása
- A tanult egybevágósági transzformációk és ezek tulajdonságainak ismerete.
- Szimmetria ismerete.
- Háromszögek tulajdonságainak ismerete (alaptulajdonságok, nevezetes vonalak, pontok, körök).
- Szimmetrikus négyszögek tulajdonságainak ismerete.
- Vektor fogalmának ismerete; három új művelet ismerete: vektorok összeadása, kivonása, vektor szorzása valós számmal.
- Kerület, terület, felszín és térfogat szemléletes fogalmának kialakulása, a jellemzők kiszámítása (képlet alapján); mértékegységek ismerete.
- A háromszögekkel kapcsolatos egyszerű számítási feladatok elvégzése

Statisztika

- Adathalmaz rendezése megadott szempontok szerint, adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése.
- Adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának értelmezése, meghatározása.

10. évfolyam

Témakör neve	Javasolt óraszám
Matematikai logika	20
Kombinatorika, gráfok	
Hatvány, gyök	
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek	60
A függvény (másodfokúval összefüggésben)	10
Háromszögek (hasonlósági feladatok)	60
Transzformációk, szerkesztések (hasonlóság)	
Trigonometria	
Valószínűség-számítás	20
Ellenőrzés, számonkérés	15
Összes óraszám:	185

TÉMAKÖR: Matematikai logika

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adott állításról eldönti, hogy igaz vagy hamis;
- alkalmazza a tagadás műveletét egyszerű feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az „és”, a (megengedő és kizáró) „vagy” logikai jelentését;
- megfogalmazza adott állítás megfordítását;
- helyesen használja a „minden” és „van olyan” kifejezéseket.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A matematikai bizonyítás fogalma
- Állítás logikai értékének megállapítása (igaz vagy hamis)
- Állítás tagadásának alkalmazása egyszerű feladatokban
- Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges fogalmak ismerete. Definíció, tétel, állítás.
- A matematikai bizonyítás fogalma- direkt, indirekt, teljes indukció, skatulyaelv, logikai szita
- Érvelés, vita. Érvék és ellenérvék. Ellenpélda szerepe.
- Gondolatmenet tagolása. Rendszerezés (érvék logikus sorrendje).
- Következtetés megítélése helyessége szerint. A bizonyítás gondolatmenetére, bizonyítási módszerekre való emlékezés.
- Kidolgozott bizonyítás gondolatmenetének követése, megértése.
- Stratégiai és logikai játékok
- Matematikatörténet: Pólya György, George Boole
- A „nem”, az „és”, a megengedő „vagy” és a kizáró „vagy” logikai jelentésének ismerete és alkalmazása matematikai és matematikán kívüli feladatokban (matematikai szakszavak ismerete: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia)
- A „minden” és a „van olyan” típusú állítások logikai értékének megállapítása és ennek indoklása egyszerű esetekben
- Adott állítás megfordításának megfogalmazása
- „Ha..., akkor...” és „akkor és csak akkor” típusú egyszerű állítások logikai értékének megállapítása
- Stratégiai és logikai játékok

FOGALMAK

tétel, bizonyítás, igaz-hamis; „nem”, „és”, „vagy”, „vagy..., vagy...”, „ha..., akkor...”, „akkor és csak akkor”

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Bíróági tárgyalás”, ahol az osztály tanulói a védők és a vádlók egy állítás indoklására, cáfolására

- „Mit állít a szigetlakó?“, „Ki volt a tettes, ha...?“ típusú feladatok eljátszása, megoldása csoportmunkában
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtő“
- Stratégiai játékok, például egyszerű NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- **konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével;**
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
- Sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
- Esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
- Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
- *Pascal-háromszög tulajdonságai*
- *Binomiális és polinomiális tétel bizonyítása*
- *Ismerje, bizonyítsa és alkalmazza a permutációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), variációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), kombinációk (ismétlés nélkül) kiszámítására vonatkozó képleteket.*
- *Skatulya elv.*
- **Gráfok alkalmazása konkrét hétköznapi és matematikai szituációk szemléltetésére, feladatok megoldására**
- *Gráfok összefüggősegi komponensekre bontása és alkalmazása*
- *Gráf vagy komplementere összefüggő*
- *Definiálja és alkalmazza a következő fogalmakat: többszörös él, hurokél, séta, körséta, út, kör, összefüggő gráf, egyszerű gráf, teljes gráf, fa, komplementer gráf, izomorf gráfok. Ismerje az n pontú teljes gráf éleinek a számát. Ismerje a fa pontjai és élei száma közötti összefüggést. Bizonyítsa, hogy bármely (legalább kétpontú) egyszerű gráfban létezik két azonos fokszámú pont.*

FOGALMAK

gráf, gráf csúcsa, gráf éle, összefüggő gráf, teljes gráf

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámplálással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
- Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
- Néhány feltételt tartalmazó tanulói órarend készítése kis elemszámmal
- Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása
- Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorikafeladatokhoz saját szöveg írása
- Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása
- **Sorbarendezési feladatok megoldásának szemléltetése gráffal**
- **Adott gráfhoz hozzáillő feladatszöveg alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában**

TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- tapasztalatai alapján véletlen jelenségek jövőbeni kimenetelére észszerűen tippel;
- véletlen kísérletek adatait rendszerezi, relatív gyakoriságokat számol, nagy elemszám esetén számítógépet alkalmaz.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Valószínűségi kísérletek elvégzése, gyakorisági, relatív gyakorisági táblázatok készítése
- A valószínűség fogalmának bevezetése statisztikai alapon
- A klasszikus valószínűségi modell fogalma és alkalmazása
- Diszkrét valószínűség-eloszlások ábrázolása hagyományos és digitális eszközzel

FOGALMAK

valószínűségi kísérlet, esemény, elemi esemény, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, diszkrét valószínűség-eloszlás

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (például dobások szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; tippelés az egyes kimenetekre és becslés a bekövetkezésük valószínűségére
- Játékokban a szerencsefaktor vizsgálata, például „Ki nevet a végén” játék esetében az első hatos dobás eloszlása
- Különböző társasjátékokban stratégia meghatározása, döntéshozatal esélylatolgatás alapján
- Különböző szerencsejátékok (lottó, totó, póker, black jack, internetes sportfogadások) esetében a nyerési esély összehasonlítása

TÉMAKÖR: Gyök

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza az n -edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza a négyzetgyök / n -edik gyök fogalmát és azonosságait

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A négyzetgyök/ n -edik gyök definíciója
- \sqrt{n} irracionális, ha n nem négyzetszám. Indirekt bizonyítás.
- Nemnegatív számok négyzetgyökének megadása számológép segítségével
- A négyzetgyökvonás/ n -edik gyökvonás azonosságai
- Bevitel a gyökjel alá, kivitel a gyökjel alól. Gyöktelenítés.
- A szerkeszthetőség néhány kérdése
- A tört kitevőjű hatvány. Permanencia-elv.

FOGALMAK

négyzetgyök, n -edik gyök

TÉMAKÖR: Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;

- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkeszlet-vizsgálattal ellenőrzi.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- megold másodfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket; ismeri és alkalmazza a diszkriminánst, a megoldóképletet és a gyöktényező alakot.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Másodfokú egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Egyenletek megoldása ekvivalens átalakításokkal
- Másodfokú egyenlet megoldása szorzattá alakítással, teljes négyzetté kiegészítéssel, megoldóképlettel és grafikusán
- Szélsőérték-feladatok másodfokú függvény vizsgálatával.
- Kapcsolat: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával történő megoldás.
- Optimális megoldásokra törekvés.
- Számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőtlenség. Algebrai bizonyítás két változóra
- Egyszerű másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása, Új ismeretlen bevezetése. Racionális gyökök keresése. Viète-formulák. Szimmetrikus egyenletek. Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával.
- Annak belátása, hogy vannak a matematikában megoldhatatlan problémák
- Matematikatörténet: magasabb fokú egyenletek megoldhatósága. Cardano, Galois, Abel.
- Másodfokú egyenlőtlenség megoldása grafikusán
- Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok megoldása
- Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek.
- Esztétválasztások, divergens gondolkodás fejlesztése.
- Másodfokú egyenletrendszer.
- Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok.
- $\sqrt{x+c} = ax+b$
- Legfeljebb két négyzetre emeléssel megoldható egyenletek megoldása.

FOGALMAK

másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkrimináns, gyöktényező alak, ekvivalens átalakítás

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Másodfokú egyenlet megoldása konkrét együtthatókkal és paraméterekkel, a lépéseket párhuzamosan végezve
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása során
- Tanulói kiselőadás tartása magasabb fokú egyenletek megoldásának történetéről, érdekességeiről
- Egyszerű, másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati helyzethez köthető szélsőérték-feladatok megoldása csoportmunkában, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérése, megfigyelése

TÉMAKÖR: Geometria-Hasonlóság-Transzformációk, szerkesztések

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza a középpontos hasonlósági transzformációt, a hasonlósági transzformációt és az alakzatok hasonlóságát;

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A középpontos hasonlósági transzformáció és a hasonlósági transzformáció ismerete, tulajdonságai, **pontos definíciója**
- A hasonlóság fogalmának ismerete és alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Gyakorlati feladatok megoldása hasonlóság segítségével (például alaprajz-, térképkészítés, modellezés)- tétel (párhuzamos szelők, szelőszakaszok, magasság, befogó tétel, körhöz húzott érintő és szelőszakaszok tétele, hasonló síkidomok/testek területére/térfogatára vonatkozó összefüggések) használata nem kötelező, de a hasonló alakzatok felismerésével akár a tétellel is megoldható feladatok megoldása kötelező
- **A párhuzamos szelők tétele (bizonyítás nélkül) és megfordítása, következmények. A párhuzamos szelőszakaszok tétele.**
- **Szakasz arányos osztása.**
- **Negyedik arányos szerkesztése.**
- **Szögfelező tétel és bizonyítása**
- **Arányossági tételek háromszögekben.**
- **Magasságtétel, befogótétel bizonyítással**
- **A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség geometriai bizonyítása. Mértani közép szerkesztése.**
- **Egyszerű szélsőérték-feladatok.**
- **Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele és bizonyítása.**
- **Aranymetszés. Kapcsolat a Fibonacci-sorozattal.**
- **Forgatva nyújtás.**
- **Ptolemaiosz tétele.**
- **Matematikatörténet: Ptolemaiosz**
- **További nem távolságtartó transzformációk.**
- **Merőleges affinitás.**
- **Kapcsolat a függvény-transzformációkkal.**
- **Inverzió.**
- **(Csak mint példa nem távolságtartó transzformációra.)**
- **Néhány kapcsolódó tétel.**
- **Ceva és Menelaosz tétele.**
- **Euler tétele a beírt és körülírt kör középpontjának távolságára.**
- **Feuerbach-kör és Euler-egyenes.**
- **(Csak említés szintjén beszélünk róluk)**
- **Matematikatörténet: Euler.**

FOGALMAK

középpontos hasonlósági transzformáció, hasonlósági transzformáció, hasonlóság, a hasonlóság aránya

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Az iskola közelében lévő magas épület (például templomtorony) magasságának meghatározása egyenes bot segítségével a bot és az épület árnyékának méréséből („Thalész-módszer”) csoportmunkában
- Valódi távolságok, valódi útvonalak hosszának meghatározása papíralapú térkép alapján

TÉMAKÖR: Trigonometria

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a szögfüggvényekre vonatkozó képleteket
- ismeri és tudja ábrázolni a sin, cos, tg, ctg függvényeket

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
- ismeri szögfüggvények származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
- ismeri a szögfüggvények alapvető (pótszögek, mellékszögek, pitagoraszi, negatív szögek) összefüggéseit;

- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- kiszámítja háromszögek területét két oldal és közbezárt szög segítségével;
- **szabályos sokszögek területének bizonyítása**
- ábrázolni tudja a trigonometrikus függvényeket

Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Szögek szinusza, koszinusza, tangense, kotangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Szögfüggvények közötti összefüggések: pitagoraszi összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
- Szögfüggvények általános értelmezése
- 90° és 360° szögfüggvényeinek származtatása a hegyesszögek szögfüggvényei alapján; szögfüggvények előjele a különböző síknegyedekben.
- **egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása**
- szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása
- Nevezetes szögek szögfüggvényei: 30° ; 60° ; 45° . (Megtanulandók.)
- Hegyesszög egy tetszőleges szögfüggvényének értékéből a többi szögfüggvény pontos értékének kiszámolása.
- Háromszögek területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében; **A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével.**
- Trigonometrikus függvények ábrázolása, **transzformálása, jellemzése.**

A FEJLESZTÉS VÁRT EREDMÉNYEI 10. ÉVFOLYAM VÉGÉN

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete.
- Definíció, tétel felismerése, az állítás és megfordításának felismerése; Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltételek felismerése, bizonyítás gondolatmenetének követése.
- Bizonyítási módszerek ismerete, használata, a skatulyaelv alkalmazása feladatmegoldás során.
- Gráfok használata gondolatmenet szemléltetésére.

Számelmélet, algebra

- Racionális és irracionális számok, a valós számok halmazának szemléletes fogalma, véges és végtelen tizedes törtek, számegyenes alkalmazása.
- A gyökvonás fogalmának ismerete, a gyökvonás azonosságainak alkalmazása, gyökös egyenletek megoldása.
- Másodfokú, és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása.
- Másodfokú függvényekre vezető szélsőérték-problémák megoldása.
- Másodfokú paraméteres egyenletek megoldása.
- Nevezetes közepek alkalmazása szélsőérték-problémák megoldásában.
- A számológép használata.

Geometria

- Hasonlósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete.
- Hasonló alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.
- Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése, számolás szögfüggvényekkel. Szögfüggvények közötti összefüggések ismerete, alkalmazása.
- Trigonometrikus függvények ábrázolása, transzformálása, jellemzése
- Ceva-, Menelaosz-, Ptolemaiosz-, Euler-tétel ismerete, alkalmazása.

Valószínűség

- Véletlen esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata. A műveletek elvégzése az eseménytérben.
- A valószínűség klasszikus modelljének alkalmazása.

A TOVÁBBHALADÁS FELTÉTELEI:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Definíció, tétel felismerése, az állítás és a megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése.
- Egyszerű összeszámlálási feladatok megoldása, a megoldás gondolatmenetének rögzítése szóban, írásban.
- Gráffal kapcsolatos alapfogalmak ismerete.

Számtan, algebra

- Másodfokú egyismeretlenes egyenlet megoldása; ilyen egyenletre vezető szöveges és gyakorlati feladatokhoz egyenletek felírása és azok megoldása, a megoldás önálló ellenőrzése.
- Másodfokú (egyszerű) kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.
- Egyismeretlenes egyszerű másodfokú egyenlőtlenség megoldása.
- A tanulók képesek a matematikai szöveg értő olvasására, szövegekből a lényeg kiemelésére.

Geometria

- A körrel kapcsolatos ismeretek használata gyakorlati számításokban.
- A hasonlósági transzformáció és tulajdonságainak ismerete.

Hasonló alakzatok; két hasonló alakzat több szempont szerinti összehasonlítása (pl. távolságok, szögek, kerület, terület, térfogat).

- Derékszögű háromszögre visszavezethető (gyakorlati) számítások elvégzése Pitagorasz-tétellel és a hegyesszögek szögfüggvényeivel; magasságtétel és befogótétel ismerete.
- A háromszögekről tanult ismeretek használata gyakorlati problémák megoldásánál.
- Trigonometrikus függvények ábrázolása, jellemzése

Valószínűség

- Véletlen esemény, elemi esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata. Kalsszikus modell használata egyszerű valószínűségi feladatokban.

11–12. évfolyam

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készüléskor egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

A 11–12. évfolyamon is jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, a trigonometria, a koordinátageometria és a térgeometria. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért az egyes részekhez javasolt óraszámok ebben a szakaszban sem jellemeznék feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására.

Ez a szakasz az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, és egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárggyal, valamint a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó készség az élet legkülönbözőbb területein segíthet. Ezt célszerű tudatosítani a tanulóknak.

Ez a kerettantervi elem a matematika főiskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó készségen túl fontos az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, az alkalmazási lehetőségek megtalálása, a kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, miközben sok, gyakorlati területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható a tanulóktól többféle készség és ismeret együttes alkalmazása. Minden témában hangsúlyosan kell kitérnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakításra. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzaktág pedig a felsőfokú képzésre való készülést.

A rendszerező összefoglalás, túl azon, hogy az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, mintaként szolgálhat a későbbiekben is bármely területen végzett összegző munkához.

Több középiskolában a matematika emelt szintű csoportok tanulói bekapcsolódnak az iskola fakultációs rendszerébe. Ez a 11-12. évfolyamnak szóló kerettantervi fejezet természetesen alkalmas arra, hogy a 11–12. évfolyamos fakultációs csoportokban tanítsák. Ilyen csoportoknál viszont figyelemmel kell lenni arra, hogy ez a tanterv épít az alsóbb évfolyamok emelt szintű tanterveinek néhány elemére. Természetesen ezeket az ismereteket célszerű vagy a 11. év elején, vagy a megfelelő témakör tárgyalása előtt áttekinteni. Ehhez szükség lehet heti egy plusz órára.

Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák. Ezen kívül számonkérésre 15 órát terveztünk.

11. osztály

Témakör neve	Javasolt óraszám
Halmazok, matematikai logika	25
Kombinatorika, gráfok	
Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése	22
Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus	35
Exponenciális folyamatok vizsgálata	35
Trigonometria	
Koordinátageometria	45
Leíró statisztika	15
Valószínűség-számítás	30
Ellenőrzés, számonkérés	15
Összes óraszám:	222

TÉMAKÖR: Halmazok, matematikai logika

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül
- Logikai kifejezések megfelelő használata
- Egyszerű állítások indoklása, tételek bizonyítása
- Stratégiai és logikai játékok

FOGALMAK

logikai műveletek

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A tanulók mindennapi tapasztalataihoz köthető, összetett állítások logikai értékének meghatározása igazságtáblázat segítségével
- Rejtvényűjságokban szereplő feladványok megfejtése következtetések láncolatán keresztül
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Matematikai és hétköznapi helyzetekhez kötődő sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása
- A binomiális együttható fogalmának ismerete, értékének kiszámítása
- *Ismétlése kombináció*
- Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül
- A gráf csúcsainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatok megoldásában
- Fagráf, *kör, séta, út*, teljes gráf, összefüggő gráf, *komplementer gráf, Euler vonal, Hamilton-kör*
- *Matematikatörténet: Euler*

FOGALMAK

faktoriális, binomiális együttható; csúcs fokszáma gráfban

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Anagramma készítése a tanulók neveiből
- A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása
- A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével
- Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése
- Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel konkrét lejátéssza, a tapasztalatok összegyűjtése

TÉMAKÖR: SZÁMELMÉLETI ISMERETEK, SZÁMHALMAZOK ÉPÜLÉSE

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;
- érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;
- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtenyezős felbontásból
- *Számelmélet alaptétele*
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
- Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)
- Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben
- Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
- A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
- Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
- Példák irracionális számokra
- Számhalmazok műveleti zártsága
- *Analógiák nem tízes alapú számrendszerek oszthatósági szabályaiban.*
- *NIM játék.*
- *Példák egyéb számokkal (pl. 7-tel) való oszthatóságra tízes számrendszerben.*
- *Algebrai azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban.*
- *Teljes indukció alkalmazása oszthatósági feladatokban.*
- *Végtelen sok prímszám van. Néhány további tétel és sejtés a prímszámok elhelyezkedéséről. Kis Fermat-tétel.*
- *Néhány speciális prím: pl. Mersenne-prímek, Fermat-prímek, faktoriális prímek, Sophie Germain-prímek*

- *Osztók számának, összegének, szorzatának meghatározása a prímtényező felbontásból.*
- *Tudjon n alapú ($n \leq 9$) számrendszerben felírt számokat összeadni és kivonni*
- *Matematikatörténet: Euklidesz, Eratoszthenész, Euler, Fermat*
- *Diofantoszi egyenletek, szöveges feladatok megoldása D -i egyenletekkel- csak akkor, ha van rá idő*

FOGALMAK

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív príme

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztükkök” bemutatása
- Számrendszerek segítségével megoldható rejtvenyek
- Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
- Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás
- Halmazábra elkészítése a számhalmazokról

TÉMAKÖR: Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az n -edik gyök fogalmát (ismétlés);
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az n -edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása (ismétlés)
- Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
- Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
- A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
- Az exponenciális függvények ábrázolása, *jellemzése* hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- *Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek*
- A logaritmus értelmezése
- *Logaritmus azonosságai, Szorzat, hányados, hatvány logaritmus*
- Áttérés más alapú logaritmusra
- *Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál.*
- *A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.*
- *Matematikatörténet: Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat.*
- Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához
- *Logaritmus függvény ábrázolása, jellemzése*
- *Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata. Inverz függvénykapcsolat.*
- *Logaritmosus egyenletek, egyenlőtlenségek.*
- *Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.*
- *Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmosus egyenleteknél*

FOGALMAK

n -edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
- Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában
- Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában
- Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével

- 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel

TÉMAKÖR: EXPONENCIÁLIS FOLYAMATOK VIZSGÁLATA

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

FOGALMAK

Nincsenek új fogalmak.

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban
- Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoportmunkában
- Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése

TÉMAKÖR: Trigonometria

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- alkalmazza a szinusz, koszinusz tételt
- megfelelő képlet választása derékszögű és általános háromszögben
- **addíciós képletek használata feladatok megoldásában**

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- **Vektorokról tanultak rendszerező ismétlése**
- **Két vektor skaláris szorzata. A skaláris szorzat tulajdonságai. Merőleges vektorok skaláris szorzata.**
- **Két vektor skaláris szorzatának kifejezése vektorkoordináták segítségével**
- Szinusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
- **Szinusz- és koszinusztétel bizonyítása**
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével

- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása
- Szögfüggvények és összefüggéseik ismételése, további összefüggések felfedezése
- *Addíciós tételek: két szög összegének és különbségének szögfüggvényei, egy szög kétszeresének szögfüggvényei, félszögek szögfüggvényei*, két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása*.*
- *A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása.*
- *Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása.*
- *Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel.*
- *Tangenstétel*.*
- *Trigonometrikus egyenletek. Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése.*
- *Trigonometrikus egyenlőtlenségek. Grafikus megoldás vagy egységkör alkalmazása.*
- *Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata.*
- *Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése*

FOGALMAK

szinusz, koszinusz, tangens, szinusztétel, koszinusztétel

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

TÉMAKÖR: Koordinátagometria

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
- egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
- A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
- Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
- Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
- *Egyértelmű vektorfelbontás tétel ismerete.*
- *A vektor 90° -os elforgatottjának koordinátái, valamint a skalárszorzat kiszámítása vektorok koordinátáiból.*
- *A skalárszorzat koordinátákból való kiszámítására vonatkozó tétel*
- Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
- *Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján, Pitagorasz-tétel alkalmazásának tudatosítása*
- Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái

- *Két vektor hajlásszöge, skaláris szorzat használata.*
- Szakaszelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
- *Szakasz osztópontjainak koordinátái, bizonyítás is.*
- *Háromszög súlypontjának koordinátái, bizonyítás is.*
- Egyenes egyenlete $y = mx + b$ vagy $x = c$ alakban
- *Egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens (meredekség). Különböző jellemzők közötti kapcsolat értése és használata.*
- Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján
- *Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes egyenlete és levezetése*
- *Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban és levezetése.*
- *Iránytényező egyenlet és levezetése.*
- *Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel.*
- *Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata. A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása*
- Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái
- *Két egyenes által bezárt szög. Skaláris szorzat használata.*
- A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében
- *Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata.*
- *Kör és egyenes kölcsönös helyzete.*
- *A kör érintőjének egyenlete.*
- *Két kör közös pontjainak meghatározása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.*
- *A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.*
- *A parabola tengelyponti egyenlete.*
- *A parabola $x^2 = 2py$ alakú egyenletének levezetése*
- *Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolákkal feladatok megoldása*
- *A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.**
- *A parabola és a másodfokú függvény. Teljes négyzetté kiegészítés.*
- *A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.**

FOGALMAK

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, *normálvektor, irányvektor, irányszög, iránytangens*, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete, *parabola egyenlete*

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
- Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
- Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
- Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
- Gondolattérkép készítése a koordináta-geometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában
- „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusán, digitális eszköz segítségével
- „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben

TÉMAKÖR: Leíró statisztika

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete
- Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középpértékekkel és szóródási mutatókkal
- Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása, **összehasonlításuk**
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések
- Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal
- Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése
- **A következő fogalmak ismerete és alkalmazása: súlyozott számtani közép, átlagos abszolút eltérés. Az adathalmazt jól jellemző középpérték választása, és a választás melletti érvelés. Statisztikai adatokat értelmezése, értékelése, azokból statisztikai következtetések levonása**

FOGALMAK

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre
- Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között
- A Simpson-paradoxon bemutatása példákon
- Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása
- Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése

TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre
- Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására
- Példák ismerete független és nem független eseményekre
- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)
- **A binomiális eloszlást (visszatevéses modell) és a hipergeometriai eloszlás (visszatevés nélküli modell) értelmezése és alkalmazása**
- **Feltételes valószínűség**
- **Matematikatörténet: Pólya György, Rényi Alfréd**

FOGALMAK

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív

gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetek, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában

- Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában
- Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése fa-gráf segítségével
- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyeremény és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

A FEJLESZTÉS VÁRT EREDMÉNYEI 11. ÉVFOLYAM VÉGÉN:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- A kombinatorikai problémák rendszerezése.
- A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában.
- Bizonyított és nem bizonyított állítás közötti különbség megértése.
- Feltétel és következmény biztos felismerése a következtetésben.
- A szövegben található információk önálló kiválasztása, értékelése, rendezése problémamegoldás céljából.
- A szöveghez illő matematikai modell elkészítése.
- A tanulók a rendszerezett összeszámlálás, a tanult ismeretek segítségével tudjanak kombinatorikai problémákat jól megoldani.
- A gráfok ne csak matematikai fogalomként szerepeljenek tudásukban, alkalmazzák ismereteiket a feladatmegoldásban is.

Számelmélet, algebra

- Prímszám, összetettszám, relatív prím, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma
- A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete.
- A logaritmus fogalmának ismerete.
- A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben, probléma megoldása céljából
- Exponenciális és logaritmosus egyenletek megoldása, ellenőrzése
- Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása.
- Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése.
- A számológép biztos használata.

Függvények, az analízis elemei

- Exponenciális-, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk.
- Exponenciális folyamatok matematikai modellje.
- A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel

Geometria

- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták.
- Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.

Valószínűség, statisztika

- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja
- Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.

A TOVÁBBHALADÁS FELTÉTELEI:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése.
- A kombinatorikai problémák rendszerezése.
- Bizonyítási módszerek áttekintése.
- A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában.

Számtan, algebra

- Prímszám, összetett szám, relatív prím, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma
- A kiterjesztett gyök- és hatványfogalom ismerete.
- A logaritmus fogalmának ismerete.
- A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak ismerete, alkalmazása alap feladatokban.
- Egyszerű exponenciális és logaritmusos egyenletek megoldása, önálló ellenőrzése.
- Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása
- Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése.
- Számológép értelmes használata a feladatmegoldásokban.

Összefüggések, függvények, sorozatok

- Trigonometrikus, exponenciális, logaritmusfüggvény értelmezése, alkalmazása.
- Függvénytranszformációk végrehajtása.
- Az alapfüggvények ábrái és legfontosabb tulajdonságainak vizsgálata (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás).

Geometria

- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében.
- A szinusztétel és a koszinusztétel alkalmazása alapfeladatok megoldásában.
- Hosszúság és szög kiszámítása.
- Két vektor skaláris szorzatának ismerete, alkalmazása.
- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták ismerete, alkalmazása.
- Szakasz felezőpontja koordinátáinak kiszámítása.
- A kör középponti egyenletének ismerete.
- Az egyenes egy szabadon választott egyenletének a tudása
- Távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben
- Két egyenes metszéspontjának a meghatározása.
- Kör és egyenes kölcsönös helyzetének vizsgálata

Valószínűség, statisztika

- A valószínűség matematikai fogalma.
- A valószínűség klasszikus kiszámítási módja.
- A mindennapok gyakorlatában előforduló valószínűségi problémákat tudják értelmezni, kezelni

12. osztály

Témakör neve	Javasolt óraszám
Sorozatok	30
Határérték, folytonosság, differenciálszámítás	35
Integrálszámítás	55
Térgeometria	
Rendszerező összefoglalás	50
Ellenőrzés, számonkérés	10
Összes óraszám:	180

TÉMAKÖR: Sorozatok**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
- a számtani/mértani sorozat n-edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
- a számtani/mértani sorozatok első n tagjának összegét kiszámolja;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
- mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A számsorozat fogalmának ismerete
- Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval
- **Rekurzív sorozat n-edik elemének megadása**
- Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint
- Számtani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege
- Mértani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege
- **a számtani és a mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggések levezetése**
- A számtani és a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása
- Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
- Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása
- Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjárdék és törlesztőrészlet számítása
- Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása
- **Véges sorok összegzése.**
- **Számtani és mértani sorozatból előállított szorzatok összegzése.**
- **Teleszkópos összegek.**
- **Sorozatok konvergenciája. A határérték szemléletes és pontos definíciói. Műveletek konvergens sorozatokkal, a konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételek alkalmazása, Konvergens és divergens sorozatok.**
- **Az $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatok.**
- **Konvergens sorozatok tulajdonságai.**
- **Torlódási pont.**
- **Konvergens sorozatnak egy határértéke van.**
- **Minden konvergens sorozat korlátos.**
- **Monoton és korlátos sorozat konvergens.**
- **Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rendőrelv.**
- **Végtelen sorok.**
- **Végtelenen sor konvergenciája, összege.**

- Végtelen mértani sor.
- Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása.
- További példák konvergens sorokra.
- Teleszkópos összegek.
- Négyzetszámok reciprokainak összege.
- Példák nem konvergens sorokra.
- Harmonikus sor.
- Feltételesen konvergens sorok.

FOGALMAK

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat
- Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével
- A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása
- Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével

TÉMAKÖR: Folytonosság, differenciálszámítás

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- Ismeri és alkalmazza függvények vizsgálatának új módszerét. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának ismerete. A differenciálszámítás módszereinek használta a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. A matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is alkalmazások keresése.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése.

Korábbi ismeretek rendszerező ismételése.

Függvény határértéke.

A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések.

Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke.

A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata.

A $\frac{\sin x}{x}$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke

A függvények folytonossága.

Példák folytonos és nem folytonos függvényekre.

A folytonosság definíciói. A folytonosság szemléletes fogalma.

Intervallumon folytonos függvények.

Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.

(Bizonyítások nélkül, de ellenpéldákkal azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve ha a függvény nem folytonos.)

Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére.

A függvénygörbe érintőjének iránytangense.

A differenciálszámítás alkalmazása érintő egyenletének felírására

A pillanatnyi sebesség meghatározása

A differenciálhatóság fogalma.

A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény.

Példák nem differenciálható függvényekre is.

Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között.

Alapfüggvények deriváltja: Konstans függvény, x^n , trigonometrikus függvények deriváltja.

Műveletek differenciálható függvényekkel.

Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja.

Inverz függvény deriváltja.

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ bizonyítása

Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. (Bizonyítás nélkül.)

Egyszerű esetekben az összetett függvény deriválási szabályának alkalmazása

Magasabbrendű deriváltak.

Matematikatörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.

A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.

Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény.

Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték.

A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása.

Középtértéktételek. Rolle- és Lagrange-tétel. (Szemléletes kép.)

Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója.

Inflexiós pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.

Függvényvizsgálat differenciálszámítással.

Összevetés az elemi módszerekkel.

Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása.

A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.

FOGALMAK

Függvényfolytonosság, -határérték. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabbrendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK:-

TÉMAKÖR: Térgometria, **integrálszámítás**

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
- lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
- kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;
- ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Térelemek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban
- A terület, térfogat, űrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete
- Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete
- Sík- és térgometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben
- A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban
- A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben
- A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással
- Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása
- A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása

- A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- Cavalieri-elv*
- Csonkakúp csonkakúp térfogat képletének bizonyítása
- Érintőpoliéderek térfogata*
- Gömb felszínének levezetése (Heurisztikus, nem precíz módszerrel)*
- A problémához illeszkedő vázlatos ábra készítése, síkmetszet elképzélése, ábrázolása

Integrálszámítás

Bevezető feladatok az integrál fogalmához.

Függvény grafikonja alatti terület.

A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület.

A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.

Alsó és felső közelítő összegek.

Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása. Közelítés véges összegekkel.

A határozott integrál fogalma, jelölése.

A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig.

Példa nem integrálható függvényre is.

Negatív függvény határozott integrálja.

A határozott integrál és a terület-előjeles terület.

Az integrál közelítő kiszámítása.

Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére.*

Matematikatörténet: Bernhard Riemann.*

Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele.

Korlátos és monoton függvények integrálhatósága.

A határozott integrál tulajdonságai.

Az integrál mint a felső határ függvénye.

Integrálfüggvény.

Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja.

Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között.

A primitív függvény fogalma.

A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál:

hatványfüggvény, polinomfüggvény, trigonometrikus függvények, exponenciális függvény, logaritmusfüggvény.

A Newton Leibniz-tétel.

Integrálási módszerek: Integrálás helyettesítéssel*

Matematikatörténet: Newton, Leibniz, Euler.*

Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra.

Két függvénygörbe közötti terület meghatározása.

Forgástest térfogatának meghatározása.*

Henger, kúp, csonkakúp, gömb, gömbszelet térfogata.*

Az integrálás közelítő módszerei – numerikus módszerek.*

Néhány egyszerűbb improprius integrál.*

Néhány hatványsor. (Formális meghatározás integrálással.)*

Hatványsorok szerepe a matematikában, fizikában, informatikában.*

Hogyan számolnak az egyszerű számológépek 12 jegy pontossággal?*

... * ha van idő rá

FOGALMAK

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkakúp, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n-oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálójá, **Alsó- és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton Leibniz-tétel**

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Hétköznapi tárgyak (üdítősdoboz, vizesflakon, tejfölösdoboz stb.) térfogatának megállapítása méréssel, a kapott eredmény összehasonlítása a tárgyon szereplő értékkel
- A Louvre bejáratként épített üvegpiramis földfelszín feletti térfogatának és az üvegfelület felszínének meghatározása (szükséges adatok gyűjtése az internetről)

- Annak becslése csoportmunkában, hogy a teret milyen arányban tudjuk kitölteni egybevágó érintkező gömbökkel különböző elrendezések esetén
- Különböző méretű, megközelítőleg gömb alakú gyümölcsök térfogatának és felszínének becslése, a becslés ellenőrzése méréssel
- A Föld felszínének és térfogatának közelítése földgömbmodellel méréssel és számolással, majd a kapott értékek összevetése a hivatalos adatokkal
- Projektmunka a gömbről: hogyan jelenik meg a gömb a mindennapi életben, a többi tantárgyban és a matematikában; a gömbi geometria alapjai

Összefoglalás, ismétlés

A FEJLESZTÉS VÁRT EREDMÉNYEI 10. ÉVFOLYAM VÉGÉN:

Sorozatok, függvények, az analízis elemei

- A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok.
- Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése.
- Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése.
- A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával.
- Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása.

Geometria

- Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése.
- Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása.

Összességében

A matematikai tanulmányok végére a matematikai tudás segítségével önállóan tudjanak megoldani matematikai problémákat.

Kombinatív gondolkodásuk fejlődésének eredményeként legyenek képesek többféle módon megoldani matematikai feladatokat.

Fejlődjön a bizonyítási, diszkussziós igényük olyan szintre, hogy az érettségi után a döntési helyzetekben tudjanak reálisan dönteni.

Feladatmegoldásokban rendszeresen használják a számológépet, elektronikus eszközöket.

Tudjanak a síkban, térben tájékozódni, az ilyen témájú feladatok megoldásához célszerű ábrákat készíteni.

A feladatmegoldások során helyesen használják a tanult matematikai szakkifejezéseket, jelöléseket.

A tanulók váljanak képessé a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára, törekedjenek az önellenőrzésre, legyenek képesek várható eredmények becslésére.

A helyes érvelésre szoktatással fejlődjön a tanulók kommunikációs készsége.

A középfokú matematikatanulás lezárásakor rendelkezzenek a matematika alapvető kultúrtörténeti ismereteivel, ismerjék a legnagyobb matematikusok felfedezéseit, legyen rálátásuk a magyar matematikusok eredményeire

A TOVÁBBHALADÁS FELTÉTELEI

Gondolkodási és megismerési módszerek

A logikai műveletek megfelelő alkalmazása a matematikában és a hétköznapi életben.

Összefüggések, függvények, sorozatok

Számtani és mértani sorozat esetén az n -edik tag, és az első n elem összegének a kiszámítása feladatokban.

Kamatoskamat-számítás alkalmazása egyszerű gyakorlati feladatokban

Geometria

Térelemek kölcsönös helyzetének, távolságuk, hajlásszögük definíciójának ismerete.

A megismert felszín- és térfogat-számítási képletek alkalmazása egyszerű feladatokban.

Valószínűség, statisztika

Egyszerű klasszikus valószínűség-számítási feladatok megoldása.

Határérték, differenciálszámítás, integrálszámítás

Egyszerű feladatok megoldása.

Az előző években felsorolt továbbhaladási feltételek erre az évre mind érvényesek.